



Lineare Algebra (Informatik) Übungsblatt 2

Aufgabe 1 (De-Morgan-Regeln, doppelte Verneinung, Kontraposition)

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Äquivalenzaussagen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ Aussagen. Dann gilt:

- (i) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$ und $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$ (De-Morgan-Regeln)
- (ii) $\neg(\neg\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A}$ (Gesetz für die doppelte Verneinung)
- (iii) $(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$ (Kontrapositionsgesetz)

Lösung 1 Wir beweisen dies mittels Wahrheitstafel:

- (i) (De-Morgan-Regeln)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B}$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	f	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	f	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$	$\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Leftrightarrow \neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B}$
w	w	w	f	f	f	f	w
w	f	w	f	f	w	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

- (ii) (Gesetz für die doppelte Verneinung)

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg(\neg\mathcal{A})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathcal{A})$
w	f	w	w
f	w	f	w

- (iii) (Kontrapositionsgesetz)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A})$
w	w	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 2 (Transitivität von „ $\Rightarrow$ “ und „ $\Leftrightarrow$ “)

Zeigen Sie mittels Wahrheitstafeln die allgemeine Gültigkeit der folgenden Implikationen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ Aussagen. Dann gilt:

$$(i) (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$$

$$(ii) (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$$

Lösung 2

(i)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	w	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	f	w	w
f	f	w	w	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w	w	w

(ii)

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C})$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$	$(\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C})$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	w
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	w	f	f	w
f	w	f	f	f	f	w	w
f	f	w	w	f	f	f	w
f	f	f	w	w	w	w	w

Aufgabe 3 (Arithmetische Reihen) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion.

(i) Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen gilt die Gaußsche Summenformel:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(ii) Für die Summe der ersten n ungeraden Zahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Lösung 3

(i) Induktionsanfang ($n=1$):

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$$

ist wahr.

Induktionsannahme (IA): Wir nehmen an, die Aussage

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

gilt für festes n .

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + (n+1) \\ &\stackrel{\text{(IA)}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

□

(ii) Induktionsanfang ($n=1$):

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$$

ist wahr.

Induktionsannahme (IA): Wir nehmen an, die Aussage

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

gilt für festes n .

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 \\ &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2n+1 \\ &\stackrel{\text{(IA)}}{=} n^2 + 2n+1 \\ &= (n+1)^2\end{aligned}$$

□

Aufgabe 4 (Reihen) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion.

(i) Für die Summe der ersten n Quadratzahlen gilt:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(ii) Für die alternierende Summe gilt:

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{1}{4} \left((-1)^n (2n+1) - 1 \right).$$

Lösung 4

(i) Induktionsanfang ($n=1$):

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

ist wahr.

Induktionsannahme (IA): Wir nehmen an, die Aussage

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt für festes n .

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \left(\sum_{k=1}^n k^2 \right) + (n+1)^2 \\ &\stackrel{(IA)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6(n^2 + 2n + 1)}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n + 6n^2 + 12n + 6}{6} \\ &= \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \end{aligned} \tag{1}$$

Wir müssen also zeigen, dass $(1) = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$. Wir multiplizieren den Zähler aus und bekommen:

$$\begin{aligned} (n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1) &= (n+1)(n+2)(2n+3) \\ &= 2n^3 + 3n^2 + 4n^2 + 6n + 2n^2 + 3n + 4n + 6 \\ &= 2n^3 + 9n^2 + 13n + 6. \end{aligned}$$

Wir haben also bewiesen, dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

unter Annahme, dass

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

gilt. □

(ii) Induktionsanfang ($n=1$):

$$\sum_{k=1}^1 (-1)^1 \cdot 1 = -1 = \frac{1}{4} \left((-1)^1 (2+1) - 1 \right) = \frac{1}{4} \cdot (-4)$$

ist wahr.

Induktionsannahme (IA): Wir nehmen an, die Aussage

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{1}{4} \left((-1)^n (2n+1) - 1 \right)$$

gilt für festes n .

Induktionsschritt ($n \Rightarrow n+1$):

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k &= \left(\sum_{k=1}^n (-1)^k k \right) + (-1)^{n+1} (n+1) \\
 &\stackrel{\text{(IA)}}{=} \frac{1}{4} \left((-1)^n (2n+1) - 1 \right) + (-1)^{n+1} (n+1) \\
 &= \frac{1}{4} \left[(-1)^n (2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1} (n+1) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[-(-1)^{n+1} (2n+1) - 1 + 4(-1)^{n+1} (n+1) \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[(-1)^{n+1} (4(n+1) - (2n+1)) - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[(-1)^{n+1} (2n+3) - 1 \right] \\
 &= \frac{1}{4} \left[(-1)^{n+1} (2(n+1) + 1) - 1 \right].
 \end{aligned}$$

□